ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, F1** **05. 11. 2015**

1ª Parte - Teórica – 15 minutos

Cotação da 1ª Parte: 3,5 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário. Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$;

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$.

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Seja $\{A_1, A_2, A_3\}$ uma partição de Ω, com $P(A_i)>0$, $i=1,2,3$, e B e C dois acontecimentos de Ω:

	V	F
$P(C)<P(B)\Rightarrow C\subset B$.		X
Os acontecimentos A_1, A_2 e A_3 são independentes.		X
$P(B\cap C)=P(B\cap C\mid \overline{A_2})\times P(\overline{A_2})+P(B\cap C\mid A_2)\times P(A_2)$.	X	
$P(A_1)+P(A_2)=P(\overline{A_3})$..	X	

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias (v.a.'s) com média, variância, respectivamente $\mu_X,\sigma_X^2,\mu_Y,\sigma_Y^2$ e funções distribuição $F_{X,Y}(x,y), F_X(x), F_Y(y)$, $F_{X,Y}(x,y)$ e respectivas f.d.p ou f.p. $f_{X,Y}(x,y), f_X(x), f_Y(y)$, e $a\in\Re$.

	V	F
Seja X v.a. contínua. $f(x)$ tem domínio em $\Re$ e contradomínio em [0;1].		X
Suponha que $E(XY)$ não existe. Então $E(X)$ e $E(Y)$ também não existem.		X
Seja $Z=\left(X-\mu_X\right)/\sigma_X$. Então $Var(Z)=0$.		X
Sejam a e b números reais. Se X é uma variável aleatória discreta então $P(a<X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$, se e só se *a* e *b* forem pontos de descontinuidade de $F_X(x)$.		X

Atenção: Das seguintes 2 questões responda apenas a 1 (Resposta a 2 questões anula as 2) [Cotação: 15].

3. Comente a seguinte afirmação: “Uma variável aleatória cuja função distribuição tem pontos de descontinuidade é uma variável aleatória discreta”. **Fundamente** bem a sua argumentação. **[Cotação: 15]**

Se a f.d. tem pontos de descontinuidade, a v.a. correspondente não é contínua. Pode então ser discreta ou mista. A classificação exata depende de informação adicional, i.e. se a soma das probabilidades nos pontos de descontinuidade é igual ou inferior a 1, respetivamente. Mas esta informação não existe.

4. Seja A um acontecimento definido no espaço de resultados Ω. Utilizando os axiomas da medida de probabilidade demonstre que $P(A) \leq 1$. **[Cotação: 15]**

Ver livro na pag. 78 (Propriedade 6).

Nome:____**Número:**_________

<u>Cotação da 2ª Parte: 6,5 Valores</u>. (**Espaço reservado para classificações**)

1.a) (22,5)	**2. (22,5)**	**T:**
1.b) (10)	**3. (10)**	**P:**

1. Uma doença que afecta indíviduos em idade adulta, manifesta-se de forma grave em 5% dos casos, de forma moderada em 20% dos casos e não afecta os restantes. O teste utilizado para detectar a doença dá resultado positivo em 95% dos casos graves, em 80% dos moderados e em 5% dos que não são afectados pela doença.

a) Mostre que mais de metade dos casos em que o teste dá positivo, o indíviduo está moderadamente afectado pela doença.

G –Afectado de forma grave; M –Afectado de forma moderada; NA – Não Afectado; T_+ –Teste positivo

$$P(G) = 0.05;\ P(M) = 0.2;\ P(NA) = 1 - [P(G) + P(M)] = 0.75;$$

$$P(T_+|G) = 0.95;\ P(T_+|M) = 0.8;\ P(T_+|NA) = 0.05$$

$$P(M|T_+) = \frac{P(M \cap T_+)}{P(T_+)} = \frac{P(T_+|M) * P(M)}{P(T_+|G) * P(G) + P(T_+|M) * P(M) + P(T_+|NA) * P(NA)}$$

$$= \frac{0.8 * 0.2}{0.95 * 0.05 + 0.8 * 0.2 + 0.05 * 0.75} = \frac{0.16}{0.245} = 0.653$$

b) De um grupo de 10 indíviduos em idade adulta escolhidos ao acaso com reposição, calcule a probabilidade de se obterem 2 casos afectados gravemente pela doença?
[Resposta errada desconta 1/4]

0.1460 ☐ 0.0746 X 0.088☐ 0.281☐

2. A quantidade de produto (em toneladas) vendida semanalmente por uma empresa é uma variável aleatória X com função densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x}{8} & 0 < x < 4 \\ 0 & outros\ x \end{cases}$$

Calcule a probabilidade de a empresa vender mais de 3 toneladas numa semana em que já vendeu pelo menos 1 tonelada.

$$F(x) = \int_0^x \frac{4-u}{8}\,du = \frac{1}{8}\left[4u - \frac{u^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{8}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{8x - x^2}{16}\,, \quad (0 \le x < 4)$$

$$F(x) = 0 \quad (x < 0)\ ;\ F(x) = 1 \quad (x \ge 4)$$

$$P(X > 3 | X \ge 1) = \frac{P(X > 3; X \ge 1)}{P(X \ge 1)} = \frac{P(X > 3)}{P(X \ge 1)} = \frac{1 - F(3)}{1 - F(1^-)} = \frac{1 - 15/16}{1 - 7/16} = \frac{1/16}{9/16} = \frac{1}{9} \approx 0.111$$

3. Numa análise imobiliária a uma certa região, definiu-se a variável aleatória bidimensional (X, Y), onde X é o número de quartos e Y é o número de casas de banho, em cada habitação. A função de probabilidade conjunta é dada por:

$X \setminus Y$	**1**	**2**
1	0.50	0
2	0.25	0.05
3	0.05	0.15

Calcule o valor esperado do número de quartos para as habitações com apenas uma casa de banho? [Resposta errada desconta 1/4]

1.44 X   1.16 ☐   1 ☐   2.75 ☐